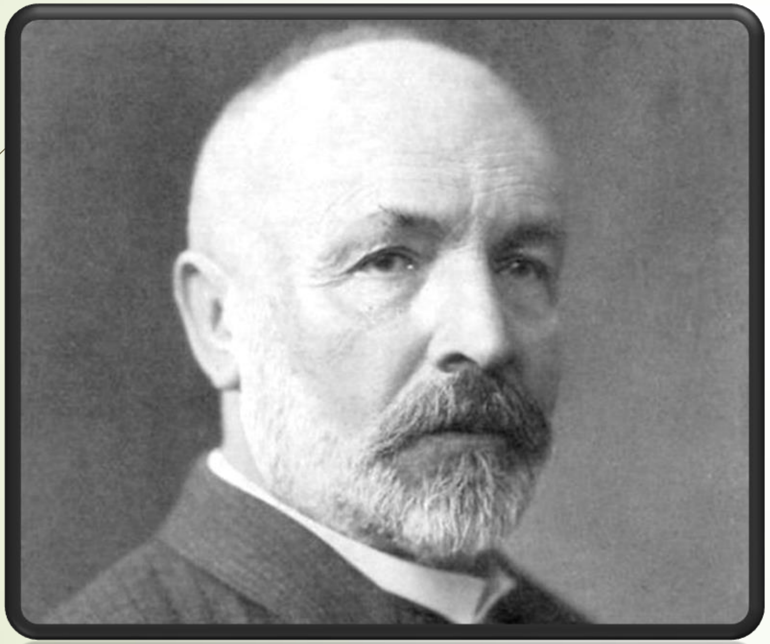
Paolo Bussotti, Università di Udine

Istituto Paschini, Tolmezzo, 17.01.2020

Cantor e la sua matematica dell'infinito

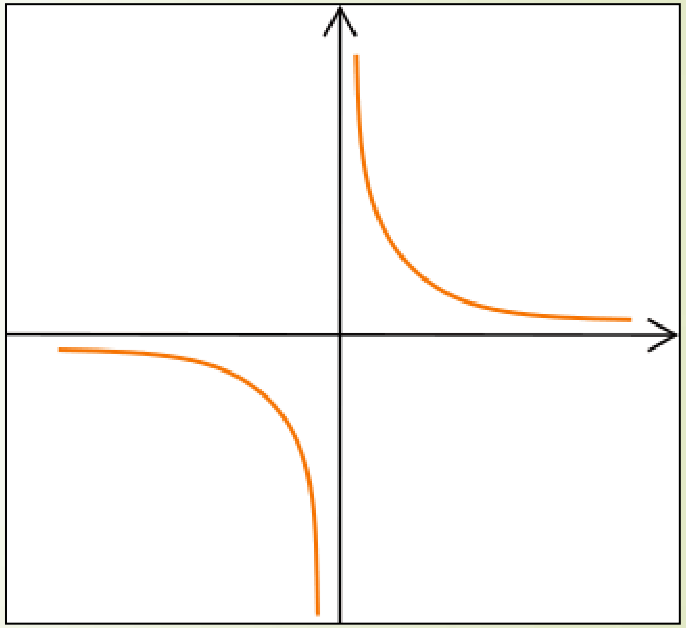


Georg Cantor (1845-1918)

Cantor e i simboli da lui usati

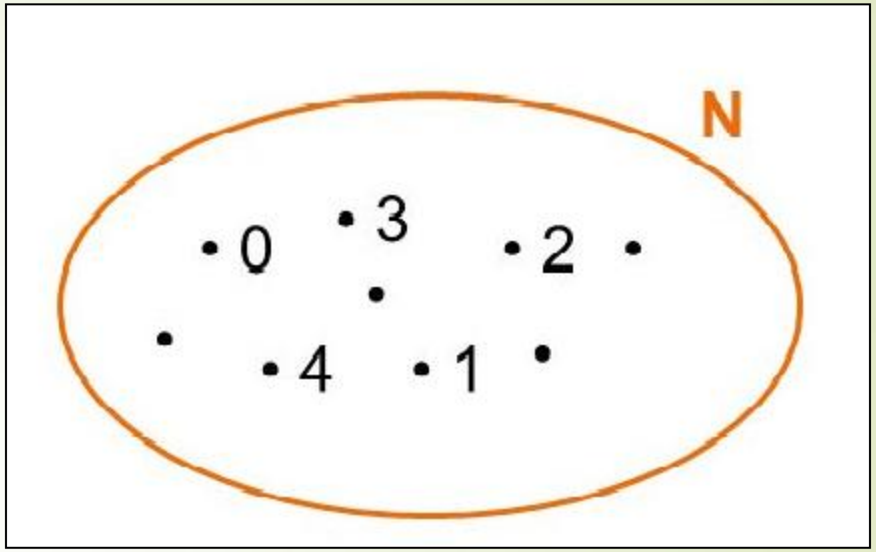
Premessa: infinito attuale e potenziale (1)

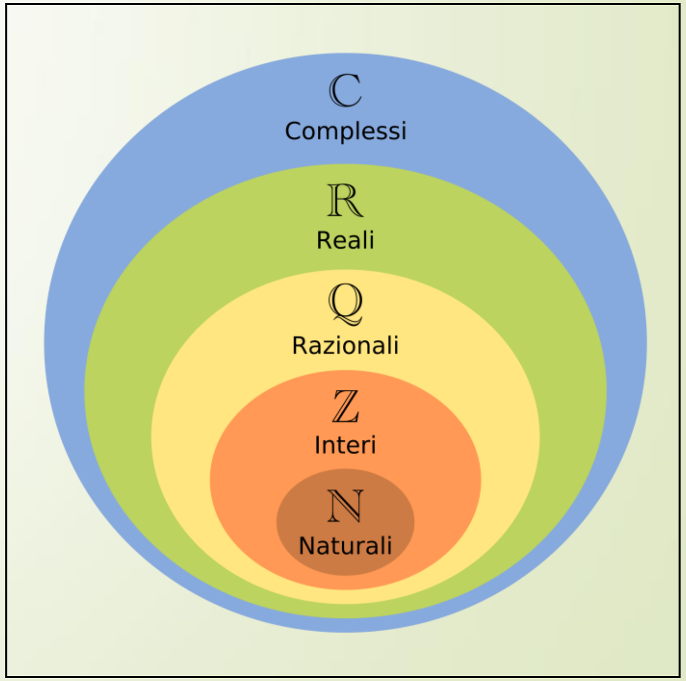
- Una grandezza si dice potenzialmente infinita se può superare un’altra arbitraria grandezza finita preassegnata dello stesso tipo.
- Esempio:
- 1) si dice che la successione dei numeri naturali è infinita perché, dato un numero naturale grande a piacere, se ne può sempre trovare un altro maggiore, anche se non esiste alcun numero naturale infinito.
- 2) Data l’iperbole equilatera $y=1/x$, diciamo che il limite per x tendente a 0+ di y è $+\infty$ perché, fissato un numero reale K, esisterà sempre un x tale che $y>K$, ma ogni valore di y è sempre finito, mai infinito.
- L’infinito potenziale esprime, quindi, il concetto di un «finito variabile» che può diventare arbitrariamente grande.



Premessa: infinito attuale e potenziale (2)

- Vediamo i numeri naturali, ma in un’altra prospettiva. Non li consideriamo più come successione, ma come insieme. Riuniamoli tutti, appunto, in un insieme e chiediamoci: quanti elementi comprende l’insieme dei numeri naturali. Risponderemo certo che sono in numero infinito. Ma questo infinito è completamente diverso dal precedente. Non è variabile. E’ una grandezza data infinita, cioè maggiore di tutte le grandezze date dello stesso tipo, non di una prefissata, sia pur in modo arbitrario. Questo tipo di infinito si chiama infinito in atto o attuale. Potremmo assegnare un numero (nuovo oggetto ideale) all’insieme dei naturali che ci dice «quanti sono». Potremmo poi assegnare un numero ai numeri interi, ai razionali ai reali, ecc. e chiederci quanti sono, che rapporto c’è tra tutti questi infiniti attuali, in apparenza, diversi. E’ quello che fece, per primo, Cantor.





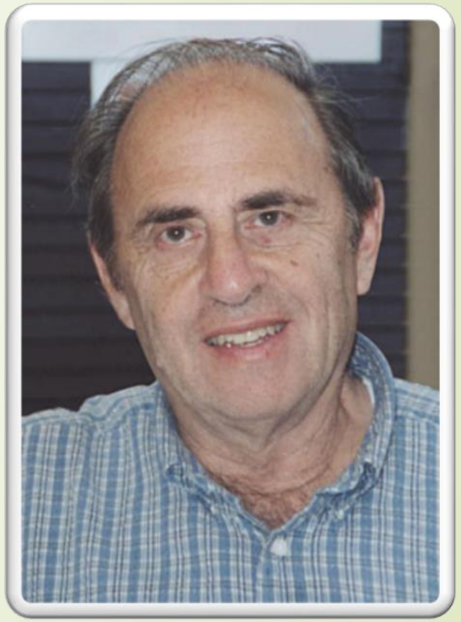
Il contesto (1)

- Il periodo che va dal 1870 al 1910 è caratterizzato da quello che viene chiamato “dibattito sui fondamenti della matematica”.
- Durante il XIX secolo erano nati nuovi rami della matematica: geometria proiettiva (approfondita e fondata), geometrie non euclidee, sistemazione e rigorizzazione dell’analisi, algebra astratta, ecc.
- Vi era stata una notevole fioritura di studi. A fine secolo, alcuni matematici cominciarono a interrogarsi sulla natura degli oggetti fondamentali: cosa è un numero reale? Quali enti sono a fondamento del concetto di numero? Quale è la natura del continuo? Cosa è un numero naturale.
- In questo dibattito Cantor ebbe un ruolo fondamentale perché…

Il contesto (2)

- 1) fu l'ideatore della teoria degli insiemi, che, a tutt'oggi, è il punto di riferimento essenziale per gli studi sui fondamenti della matematica;
- 2) al suo interno sviluppò la matematica dell'infinito. Inventò insiemi e numeri infiniti ordinali e cardinali. Distinse tra diversi tipi di infinito. Creò una vera e propria algebra dell'infinito. Il concetto e l'uso dell'infinito attuale in matematica nascono con Cantor. Oggi tale concetto è uno degli elementi essenziali dell'intero edificio matematico.
- 3) Pensò a vari problemi legati a quanto descritto. Il più noto dei quali è l' «ipotesi del continuo», a cui è stata data una prima risposta da Goedel nel 1940 e la soluzione definitiva solo nel 1963 dal matematico americano Paul Cohen.

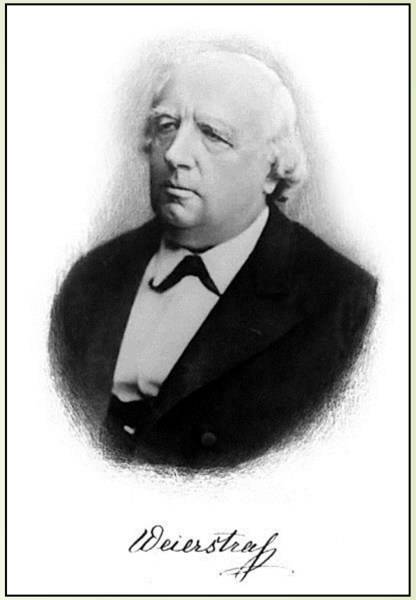
$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$



Il contesto (3)

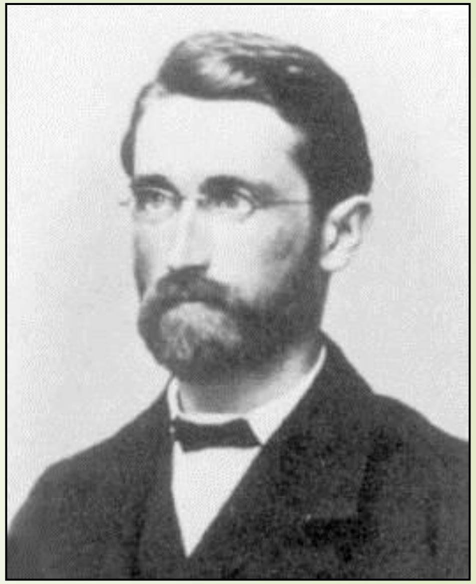
- Karl Weierstrass (1815-1897): grandissimo analista. Nel settore dei fondamenti della matematica, dette, nel 1872 una definizione di numero reale (lo stesso anno ne dettero due diverse Dedekind e Cantor).

- Leopold Kronecker (1823-1891): grande algebrista. Matematico molto creativo. Personaggio assai potente. Fu un irriducibile nemico di Cantor. Riteneva priva di ogni valore la matematica dell'infinito attuale. Per lui non esistevano né numeri né grandezze infinite in atto.



Il contesto (4)

- Richard Dedekind (1831-1916): forse il massimo algebrista dell'Ottocento. Ebbe grande profondità di pensiero. A lui si deve la prima definizione di «sistema infinito». Ebbe le idee chiare su come definire la continuità e sul concetto di struttura matematica. Condivise con Cantor il merito dell'introduzione dell'infinito attuale in matematica, anche se non sviluppò un'algebra delle grandezze infinite.



- Gottlob Frege (1848-1925). Fu un logico più che un matematico. Ideatore della moderna logica matematica. Cercò una fondazione rigorosa di tutta la matematica, a cominciare dal concetto di numero intero e dal principio di induzione completa. Dette anche profondi contributi al rapporto tra senso e significato delle espressioni linguistiche.

Primi risultati (1)

- Nel 1872 Cantor stava studiando la convergenza di due serie dette serie di Fourier, oggetto del tipo:

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$
$$\frac{1}{2}b'_0 + \sum (a'_n \sin nx + b'_n \cos nx)$$

- Dimostrò che se queste due serie convergono e hanno la stessa somma per ogni valore di *x*, escluso al più un numero di valori appartenenti a un determinato *insieme infinito*, hanno coefficienti coincidenti.
- A questo punto Cantor cominciò ad essere così interessato alla struttura degli insiemi infiniti in quanto tali che abbandonò la teoria delle serie di Fourier e cominciò a sviluppare la propria teoria degli insiemi.
- Definizione dei numeri reali.

Primi risultati (2)

- Nel 1873, nel fondamentale contributo «Su una proprietà della classe di tutti i numeri reali algebrici», Cantor dimostra due proprietà, la prima davvero stupefacente:
- Un numero algebrico è soluzione di un’equazione a coefficienti interi. Per, esempio, se consideriamo un’equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

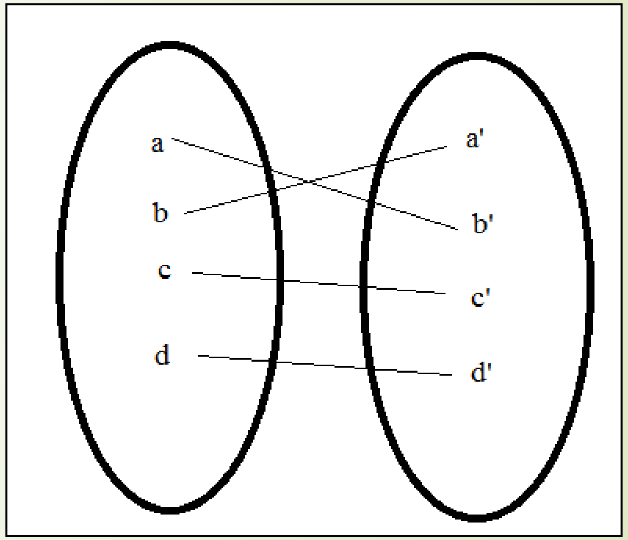
- Questa equazione ha per soluzioni tutti i numeri interi e razionali (basta porre a=0 ottenendo un’equazione di primo grado), ma ha in più tante altre soluzioni. Se, per esempio ponete a=1, b=0, c=-2, avrete l’equazione

$$x^2 - 2 = 0$$

- che, ovviamente, ha per soluzioni $x = \pm\sqrt{2}$, che non è un numero razionale.

Primi risultati (3)

- Se avete due insiemi (anche finiti) quando dite che hanno lo stesso numero di elementi?
- L'unico criterio ragionevole sembra quello per cui ad ogni elemento del primo insieme ne corrisponde uno del secondo e viceversa. La cosiddetta corrispondenza biunivoca.
- Bene: Cantor adottò questo criterio anche per gli insiemi infiniti. Quindi in generale: «due insiemi hanno la stesso numero di elementi o cardinalità se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi».
- Allora nel 1873 dimostrò la sorprendente proprietà che i numeri algebrici e i numeri naturali hanno la stessa cardinalità, anche se è palese che esistono numeri algebrici che non sono naturali, come appunto $\sqrt{2}$, mentre tutti i numeri naturali sono algebrici.



Primi risultati (4)

- Questo risultato, a prima vista così sorprendente, ci deve stupire fino a un certo punto. Consideriamo, per esempio, l'insieme di tutti i numeri naturali e di tutti i numeri pari. E' ovvio che esistono numeri naturali che non sono pari, i dispari, e che, invece, ogni numero pari è un intero. Pertanto se consideriamo sottoinsiemi finiti – per esempio i numeri da 1 a 100 – non ci sarà corrispondenza biunivoca tra tutti i numeri naturali e i numeri pari. Se, però, consideriamo tutto l'insieme dei numeri naturali, una tale corrispondenza esiste. Basta associare ad ogni intero il proprio doppio e ad ogni pari la propria metà:

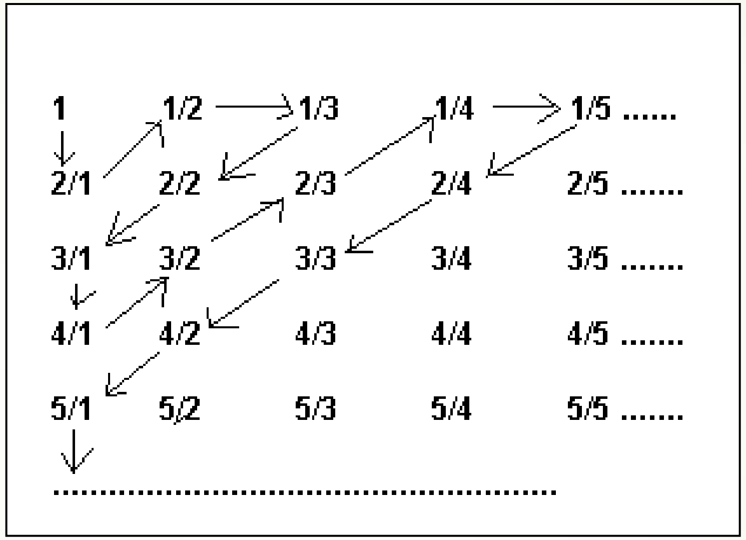
$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ 0 & 2 & 4 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

Primi risultati (5)

- Quindi si capisce subito che i criteri che guidano l'aritmetica e l'algebra dei numeri infiniti non sono gli stessi di quelli applicabili ai numeri finiti. In particolare, può accadere che due insiemi «abbiano lo stesso numero di elementi» anche se esistono elementi che non appartengono a un insieme ma che appartengono al secondo senza che valga il viceversa.
- Insiemi infiniti che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali si chiamano «numerabili».
- La dimostrazione di Cantor che i numeri algebrici sono numerabili è complessa. Vediamo, invece, un semplice trucchetto che permette di mostrare come i numeri razionali, cioè le frazioni siano numerabili, pur avendo proprietà molto diverse da quelle degli interi, prima tra tutte la densità. Infatti, dato due qualunque numeri razionali, tra essi, ne esistono infiniti altri. Come dimostrereste la densità in maniera molto semplice?

Primi risultati (6)

- Vediamo che i numeri razionali sono numerabili.



- La tabella rappresenta tutte le frazioni: nella prima colonna quelle con denominatore 1, nella seconda con denominatore 2, ecc.
- Seguite l'ordine delle frecce: a 1 si associa 1, a 2/1 si associa 2, a 1/2 si associa 2, a 1/3 si associa 3, e così via. I numeri razionali sono presi tutti. Ciò vuol dire che il loro insieme è numerabile.

Primi risultati (7)

- La categoria degli insiemi numerabili comprende quindi molti insiemi numerici. Esistono insiemi infiniti diversi da quelli numerabili o tutti gli insiemi infiniti sono numerabili?
- Sempre nel saggio del 1873 Cantor dimostrò che l'insieme dei numeri reali è più che numerabile, cioè che non esiste una corrispondenza biunivoca tra i naturali e i reali. La cosa può essere vista così:

X1	=	0,	0	6	8	7	2	0	1	5	8	...
X2	=	0,	5	4	3	4	3	5	7	8	2	...
X3	=	0,	3	5	2	3	2	7	8	5	5	...
X4	=	0,	8	0	0	2	7	3	4	3	7	...
X5	=	0,	7	5	1	2	5	2	6	3	6	...
X6	=	0,	7	4	4	8	6	4	3	7	2	...
X7	=	0,	3	7	4	3	0	0	6	3	6	...
X8	=	0,	0	0	3	0	6	6	4	2	0	...
X9	=	0,	7	3	0	8	2	2	0	6	6	...
Y	=	0,	1	5	3	3	6	5	7	3	7	...

Primi risultati (8)

- In conclusione del lavoro del 1873, Cantor formula una prima, e incompleta, versione di quella che passerà alla storia come ipotesi del continuo:
- 1) l'infinito del numerabile è il più piccolo;
- 2) l'infinito dell'insieme dei numeri reali, detto cardinalità del continuo, è l'infinito immediatamente successivo a quello del numerabile.
- Nel 1878 Dedekind formula la definizione standard di insieme infinito, già implicita nei lavori di Cantor: «un insieme si dice 'infinito' se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio, altrimenti è finito».
- Cantor continua i suoi studi sugli insiemi infiniti. Nel 1883 pubblica l'importantissimo opuscolo *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità*.
- Vediamone in sintesi i risultati principali.

I *Fondamenti* (1)

- Dal punto di vista della matematica moderna, i *Fondamenti* sono un’opera atipica perché dei 14 capitoli che li compongono, i primi 10 sono in gran parte dedicati a sostenere la legittimità dell’infinito in atto, contro chi riteneva che non fosse legittimo pensare all’esistenza di insiemi infiniti. Cantor analizza le posizioni di quasi tutti i filosofi che si sono occupati di infinito in atto: da Aristotele a Spinoza a Leibniz dimostrando che, coloro che si opponevano alla ammissibilità di questo concetto partivano da alcune *petitio principi*. Comprende che il problema consiste nel delineare con esattezza un concetto tutt’altro che banale: quello di *esistenza matematica*. Cantor è come se dicesse che il senso comune o l’intuizione non sono una guida utile per ammettere ciò che può esistere sul piano matematico. Occorre un criterio preciso: «tutto ciò che non è autocontraddittorio o non è in contraddizione con il resto della matematica deve essere ammesso come legittimo». Scrive esplicitamente Cantor:

I *Fondamenti* (2)

- «La matematica si sviluppa in modo completamente libero, salvo l'ovvia avvertenza che i suoi concetti non possono essere in sé contraddittori e devono stare in un rapporto certo, regolato da definizioni, con quelli costruiti in precedenza e già disponibili e consolidati. Quando, in particolare, essa introduce nuovi numeri è tenuta solo a darne definizioni che assicurino loro una determinatezza, e in certi casi una relazione con i numeri già dati, tali che sia possibile, caso per caso distinguerli l'uno dall'altro. Non appena un numero soddisfa tutte queste condizioni lo si può e deve considerare esistente in matematica. Sta qui, a mio avviso, il motivo per cui i numeri razionali, irrazionali e complessi vanno considerati esistenti tanto quanto gli interi positivi finiti».
- Hilbert (1862-1943) generalizzerà e specificherà le idee di Cantor.
- Ma quali numeri voleva introdurre Cantor?

I *Fondamenti* (3)

- Voleva introdurre i numeri infiniti, che lui chiamò transfiniti. Abbiamo visto che esistono almeno due infiniti diversi, quello degli insiemi numerabili e quello degli insiemi dei numeri reali. Cantor intendeva sviluppare un'algebra dei numeri transfiniti. Per fare ciò chiarì la distinzione tra numero ordinale e numero cardinale. Detto intuitivamente: il numero cardinale ci dice quanti oggetti ha un insieme. Per esempio quanti sono gli oggetti in questa stanza. Il numero ordinale ci consente di contarli e di denominarli: primo, secondo, terzo, ecc.
- Per gli insiemi finiti i due numeri, pur sottendendo operazioni mentali diverse, coincidono. Infatti, comunque disponiate gli oggetti in questa stanza il loro numero non cambierà (cardinale) e potrete sempre dire che uno (magari non sempre lo stesso) è il primo, uno è il secondo, ecc. Così che il massimo ordinale di un insieme finito coincide sempre col cardinale di quell'insieme. Ma che succede nell'infinito?

I *Fondamenti* (4)

- Numeri ordinali transfiniti:
- Consideriamo la serie dei numeri naturali:
- 1,2,3,4,5,....
- Cantor sostenne che non vi è alcuna contraddizione nel pensare a un numero intero maggiore di ogni numero naturale e che rappresenti il modo in cui è ordinata la serie degli interi, cioè il fatto che sono assegnabili posti separati in un'unica successione crescente con continuità.
- Indicò questo numero con ω. Scrive:
- «E' senz'altro lecito pensare questo numero ω appena creato come il *limite* al quale tendono tutti i *v*, ovvero è da considerarsi maggiore di tutti essi». (P. 115).
- Ora, continua Cantor, è legittimo aggiungere al numero ω, i numeri naturali 1,2,3,…, così da ottenere la successione

I *Fondamenti* (5)

- ω, ω+1, ω+2, … ω+n, …   1)
- Dal punto di vista della cardinalità, cioè di quanti sono gli elementi di un insieme, questi numeri rappresentano tutti insiemi numerabili. Infatti, ω rappresenta i numeri interi; ω+1 rappresenta tutti i numeri interi positivi più «un altro numero» posto dopo tutti gli interi positivi, ma questo insieme è chiaramente numerabile, basta associare gli insiemi rappresentati da ω, e da ω+1 in questo modo

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots 0 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \updownarrow \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & \dots ;1 \end{array}$$

- Analogamente, tutti i numeri della successione 1) rappresentano insiemi numerabili.

I *Fondamenti* (6)

- Vediamo cosa succede all'ordine di questi insiemi. Si comprenderà, allora bene come, per insiemi infiniti il numero ordinale e quello cardinale non coincideranno più. Si è visto che ω e ω+1 hanno la stessa cardinalità, ma cosa rappresentano come numeri ordinali?

$$\omega = \{0,1,2,3,\ldots n\ldots$$
$$\omega + 1 = \{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots | 1\}$$

- ω+1 rappresenta un insieme che ha un elemento dopo tutti i numeri naturali e nessun numero dell'insieme rappresentato da ω ha quel posto d'ordine. E' un posto che in ω non esiste. Nonostante che ω e ω+1 abbiano la stessa cardinalità, come numeri ordinali sono diversi. Nell'infinito, afferma Cantor, si coglie la vera differenza tra numeri ordinali e numeri cardinali.

I *Fondamenti* (7)

- La produzione di numeri ordinali transfiniti può continuare calcolando il limite della successione 1). Otterremo la successioni

$$2\omega,\ 2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \dots\ 2\omega+n,\ \dots$$

- La cardinalità dell'insieme rappresentato da ognuno di questi numeri è quella del numerabile. Vediamo come è fatto 2ω.

$$2\omega = \{0,2,4,\dots 2n\dots \mid 1,3,5,\dots 2n+1,\dots$$

I *Fondamenti* (8)

- I principi di produzione (somma e limite) possono proseguire giungendo a numeri delle forme

$$3\omega, 3\omega+1, \ldots 3\omega+\nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu\omega, \mu\omega+1, \ldots, \mu\omega+\nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{m-1}\omega+\nu_\mu$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega^\omega$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

I *Fondamenti* (9)

- I numeri ordinali transfiniti hanno un’algebra che è in parte diversa da quella ordinaria. Per esempio non è commutativa. Limitiamoci al caso più semplice, quello dell’addizione di ω con 1. Formiamo ω+1 e 1+ω

$$\omega+1=\{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots|1\}$$
$$1+\omega=\{1|0,1,2,\ldots,n+1,\ldots$$

- Come si vede, sono due numeri ordinali completamente diversi. Il primo insieme ha un primo ed un ultimo elemento, mentre il secondo insieme ha un primo, un secondo, un terzo elemento e così via, cioè il suo ordine è esattamente quello degli interi, espresso da ω, mentre, come abbiamo già visto, ω+1 ha un ordine diverso.

$$\omega=1+\omega\neq\omega+1$$

I *Fondamenti* (10)

- A questo punto Cantor chiama l'insieme di tutti i numeri naturali «prima classe numerica» e la indica con (I). Considera poi l'insieme di tutti gli ω-numeri, li chiama «la seconda classe numerica», la indica con (II), e si chiede quale sia la sua cardinalità, cioè «quanti sono questi numeri?». In due bellissimi teoremi dimostra che la cardinalità della classe (II) è maggiore di quella della classe (I) e che tra le due cardinalità non ne esiste alcuna intermedia. Se ricordate che nel 1873 Cantor aveva ipotizzato che la cardinalità del continuo è l'infinito immediatamente successivo al numerabile e ora dimostra che l'infinito della classe (II) è quello immediatamente successivo al numerabile, l'ipotesi del continuo si trasforma nell'asserzione che la classe (II) e l'insieme dei numeri reali hanno la stessa cardinalità (esiste, cioè, una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi).
- Cantor, come ha già fatto per i numeri naturali, considera il numero transfinito ordinale che rappresenta l'ordine della classe (II) e lo indica con Ω. A questo punto, con gli stessi principi precedenti, è possibile costruire Ω+1, Ω+2,…Ω+n,…e così via.

I *Fondamenti* (11)

- Ognuno di questi numeri indica insiemi che hanno la cardinalità della (II) classe numerica. Considerati tutti gli Ω-numeri, chiamati «la terza classe numerica (III)», Cantor dimostra che la cardinalità di (III) è maggiore di quella di (II) e che tra le due non ne esiste una intermedia. Continuando in questo modo, si comprende come si possano generare infinite classi di numeri ordinali transfiniti, la cardinalità di ciascuna delle quali sia quella immediatamente maggiore rispetto alla cardinalità della classe precedente. Se, come fece Cantor dopo i *Fondamenti*, indichiamo le cardinalità con la prima lettera dell'alfabeto ebraico,

$$\aleph$$

- e le assegniamo l'indice 0 per indicare la cardinalità del numerabile, l'indice 1 per indicare quello della seconda classe e così via, i risultati di Cantor possono essere così riassunti

$$1)\ \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots \aleph_n < \ldots$$
$$2)\ \forall i, \neg\exists l : \aleph_i < \aleph_l < \aleph_{i+1}$$

Contributi alla teoria degli insiemi transfiniti (1)

- Dopo i *Fondamenti*, l'altra grande opera di Cantor sono i *Contributi ai fondamenti della teoria degli insiemi transfiniti*. Si tratta di due lavori pubblicati rispettivamente nel 1895 e nel 1897.
- Il primo *Contributo* si apre con un risultato importante e di non difficile dimostrazione: la cardinalità dell'insieme dei numeri reali equivale a quella dell'insieme di tutti i sottoinsiemi dei naturali. Per dare un'idea: se prendiamo un insieme finito di *a* elementi, non è difficile dimostrare che l'insieme di tutti si suoi sottoinsiemi ha 2^a elementi.
- Consideriamo, per esempio, l'insieme dei numeri (1,2,3). L'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi ha come elementi $\{(\varnothing),(1),(2),(3),(1,2),(1,3),(2,3,),(1,2,3,)\}$, totale otto elementi, cioè 2^3 .
- Questa proprietà vale anche per gli insiemi infiniti.

Contributi alla teoria degli insiemi transfiniti (2)

- Dunque, avendo indicato con $\aleph_0$ la cardinalità del numerabile, risulta che la cardinalità del continuo è $2^{\aleph_0}$.

- Cantor non è in grado di dimostrare direttamente che non esiste alcun numero cardinale tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$. Ricordando le cardinalità delle classi di numeri ordinali transfiniti. L'ipotesi del continuo viene formulata da Cantor nel modo in cui passerà alla storia:

$$\boxed{\aleph_1 = 2^{\aleph_0}}$$

Contributi alla teoria degli insiemi transfiniti (3)

- In effetti, dato un insieme è sempre possibile formare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Nel caso dei numeri reali, l'insieme di tutti i sottoinsiemi avrà cardinalità

$$2^{2^{\aleph_0}}$$

- Per esempio l'insieme di tutte le funzioni dai numeri reali nei numeri reali (da *R* in *R*).
- Ci sono dunque due scale di cardinalità infinite

$$1)\ \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_n, \ldots$$

$$2)\ \aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$$

- L'ipotesi generalizzata del continuo consiste nella asserzione che, in realtà si tratti di una sola scala con le identità

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}; \aleph_2 = 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots\ldots$$

Accenno all’approccio moderno

- 1) Assiomatizzazione, a partire dai primi anni del ‘900;
- 2) ammissione o meno di certe regole di composizione;
- 3) risultato di Goedel del 1940;
- 4) risultato di Cohen del 1963.
- Ulteriori problemi: i paradossi della teoria degli insiemi:
- A) Insieme di tutti gli insiemi: esiste o no? Che dire del suo numero cardinale? (Paradosso del più grande numero cardinale).
- B) Paradosso di Burali Forti o del massimo ordinale.
- Soluzioni di Cantor.

I miei dipartimenti a Uniud

- https://www.dmif.uniud.it/triennale/matematica/
- https://www.uniud.it/it/ateneo-uniud/ateneo-uniud-organizzazione/dipartimenti/dium